Petre Năchilă

BACALAUREAT

Matematică
M_Tehnologic

- Breviar teoretic
- 1000 de itemi de antrenament
- 20 de modele de teste cu rezolvări complete
- 40 de modele de teste pregătitoare

Editura NOMINA

Cuprins

A. TEME RECAPITULATIVE

Capitolul 1

Algebră, geometrie, trigonometrie. Clasele IX-X

1.1. Mulțimi de numere. Elemente de logică matematică

- **Mulțimi finite. Reguli de numărare**

O mulțime este *finită* dacă are n elemente, $n \in \mathbb{N}$.

O mulțime este infinită dacă nu este finită.

O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte *mărginită* dacă $\exists\ m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq x \leq M$, $\forall\ x \in A$.

Regula sumei: Dacă un anumit obiect A poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect B poate fi ales în n moduri, atunci alegerea „lui A sau B" poate fi realizată în $(m + n)$ moduri.

Regula produsului: Dacă un obiect A se poate alege în m moduri şi dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A, B) în această ordine, poate fi realizată în $m \cdot n$ moduri.

- **Modulul unui număr real**: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

a) $|x| \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$;

b) $|-x| = |x|,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$;

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$;

d) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ \forall\ x \in \mathbb{R}, \forall\ y \in \mathbb{R}^*$;

e) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$;

f) $|x| = a,\ a > 0 \Leftrightarrow x = \pm a$;

g) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a],\ a > 0$;

h) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ sau $x \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty),\ a > 0$.

- **Partea întreagă și partea fracționară**

Se numește *partea întreagă a* numărului real x, notată $[x]$, cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x. Deci $[x] \in \mathbb{Z}$ și $[x] \le x < [x] + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Se numește *partea fracționară a* numărului real x, notată cu $\{x\}$, diferența dintre x și partea lui întreagă. Deci $\{x\} \in [0, 1)$ și $\{x\} = x - [x]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

a) $x \in [k, k+1);\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = k$;

b) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{x\} = 0$;

c) $[x+n] = [x] + n,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$;

d) $\{x+n\} = \{x\},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$;

e) $x - 1 < [x] \le x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

- **Inegalități remarcabile** (pentru două numere reale)

a) Inegalitatea mediilor: $\forall\, a, b > 0$ avem:

$$\min(a, b) \le \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \max(a, b);$$

b) Inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwartz:

$a, b, x, y \in \mathbb{R},\ (ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$;

c) Inegalitatea lui Bernoulli: $\alpha > 0,\ r > -1,\ r \in \mathbb{Q},\ (1 + \alpha)^r > 1 + r\alpha$.

- **Principiul inducției matematice**

Propoziția $p(n)$ este adevărată pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}$ dacă sunt verificate condițiile:

1. Propoziția $p(n)$ este adevărată pentru $n = 0$;
2. Din presupunerea că $p(n)$ este adevărată pentru $n = k$, $k \in \mathbb{N}$ rezultă că este adevărată pentru $n = k + 1$.

Etapele inducției matematice:

I. *Verificarea propoziției*: pentru $n = 0$ verificăm dacă $p(0)$ este adevărată;

II. *Demonstrația*: $p(k) \rightarrow p(k+1)$. Presupunem că $p(k)$ este adevărată și demonstrăm că $p(k+1)$ este de asemenea adevărată. Dacă cele două etape sunt validate, atunci are loc

Concluzia: Propoziția $p(n)$ este adevărată, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Formule care pot fi demonstrate prin inducție matematică:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2},\ n \in \mathbb{N}^*$;

b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \in \mathbb{N}^*$;

c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2,\ n \in \mathbb{N}^*$.

- **Formule de calcul prescurtat**

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab;$ $\quad$ $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab;$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$

$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc;$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$ $\quad$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$ $\quad$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$

- **Sume remarcabile**

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}; \qquad 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2;$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \qquad 2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3};$$

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}; \qquad 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

PROBLEME PROPUSE

1. a) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fracțiile $\dfrac{3n+7}{2n+5}$ și $\dfrac{2\cdot 3^n+5}{3^{n+1}+6}$ sunt ireductibile.

b) Generalizare.

2. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fracțiile $F_1 = \dfrac{2^{n+3}+2^{n+1}+2^n}{3^{n+5}+2\cdot 3^{n+3}}$, $F_2 = \dfrac{n^2+n+2}{3^2+9n+4}$ sunt reductibile.

3. Calculați:

a) $\sqrt{162}-\sqrt{242}+\sqrt{288}-\sqrt{98}$; $\qquad$ b) $\sqrt{320}+\sqrt{20}-\sqrt{500}+\sqrt{125}$.

4. Determinați $n \in \mathbb{Z}$ pentru care fracțiile sunt reductibile:

a) $\dfrac{n-3}{3n-2}$; $\qquad$ b) $\dfrac{n+1}{n^2-3n+1}$.

5. Determinați cifrele a, b pentru care următoarele numere sunt iraționale pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sqrt{5n+a}$; $\qquad$ b) $\sqrt{4n+b}$.

6. Fie $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $b=\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Calculați $a+b$ și $\dfrac{b}{a}-\sqrt{3}$.

7. Demonstrați că $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2} \in \left(3,\ 2\sqrt{3}\right)$.

8. Fie $x = \sqrt{7} - \sqrt{2}$, $y = \sqrt{7} + \sqrt{2}$. Demonstrați că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in \left(\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

9. Fie $a = \sqrt{4 - \sqrt{7}}$, $b = \sqrt{4 + \sqrt{7}}$. Calculați $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$.

10. Fie $x = \sqrt{99 - 70\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{99 + 70\sqrt{2}}$.

a) Calculați mediile aritmetică și geometrică ale celor două numere (în câte două moduri fiecare).

b) Calculați $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4}$.

11. Comparați numerele a și b în cazurile:

a) $a = \sqrt{7} - 3$, $b = 3 - \sqrt{5}$;

b) $a = \sqrt{5} - \sqrt{2}$, $b = 2 - \sqrt{3}$;

c) $a = \sqrt{11} + \sqrt{13}$, $b = \sqrt{19} + \sqrt{5}$.

12. Calculați:

a) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{9} - \sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{\frac{15^2 + 20^2}{30^2 - 18^2}} + \sqrt{18^2 + 24^2}$.

13. Calculați:

a) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}}$.

14. Determinați $a \geq 4$, $b \geq 9$ dacă $a + b \leq 4\sqrt{a - 4} + 6\sqrt{b - 9}$.

15. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $\sqrt{a^2 - 2a + 2} + \sqrt{4b^2 - 12b + 13} \leq 3$.

16. Calculați:

a) $a - b$, dacă $a^2 + b^2 + 4a - 6b + 13 = 0$;

b) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1\right)^2 + 2\left(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$;

c) $[5,4] + \left[\frac{7}{2}\right] - [5,(3)] + \left[-\frac{11}{3}\right] - [-3,1]$;

d) $\{1,5\} + \{-3,5\} - \left\{-\frac{11}{4}\right\} - \left\{2\frac{1}{4}\right\}$;

e) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{197 \cdot 200}$;

f) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{97 \cdot 101}$.

17. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $|x| + |y| \geq |x - y|$.

18. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

a) $|x + 4| + |-2 + x| \geq 6$; b) $|3x + 1| + 3|x - 2| \geq 7$.

19. Calculați $\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{4}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{50}{2}\right]$.

20. Demonstrați că $S_n = \left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2}\right]$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este pătrat perfect dacă și numai dacă n este număr par.

21. Determinați $x \in \mathbb{R}$ dacă:

a) $|x - 1| + |2 - 2x| = 6$; b) $|1 - 2x| \leq 3$; c) $[2x + 1] = x - 1$;

d) $\{2x\} = 0$; e) $\{x\} = \frac{1}{4}$; f) $[x + 1] = 2x - 1$.

22. Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ avem:

a) $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$; b) $\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

23. Demonstrați că dacă $x, y \in I = [3, \infty)$, atunci $xy - 3x - 3y + 12 \in I$.

24. Demonstrați prin inducție matematică, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

b) $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{n}{4n+3}$;

c) $2^n > 2n + 1$, $n \geq 3$;

d) $n! > 2^n$, $\forall\, n \geq 4$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

25. Calculați următoarele sume:

a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$; b) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 100}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{21+2\sqrt{110}}}$.

26. Demonstrați că $7^n + 17 = M_6$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

27. Determinați numerele întregi x, y, știind că $x^6 + 5x^3 = y^8 + 103$.

28. Rezolvați ecuația $\left[\frac{3x+1}{5}\right]+\left[\frac{6x+3}{10}\right]=1$.

29. Determinați $m \in \mathbb{R}$ dacă ecuația $|2x+4|-|x-1|=m$ are soluție unică.

30. Fie $n \geq 2$. Determinați $\left\{n+\sqrt{n^2-1}\right\}+\left\{\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}\right\}$.

31. Demonstrați că:

a) $\left\{\sqrt{\frac{21}{2}}\right\}<\frac{1}{2}$; b) $\left[\sqrt{\pi^2+n}\right]=3$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

32. Fie a, b, c trei zecimale consecutive ale lui $\frac{4}{37}$. Determinați $a^2+b^2+c^2$.

33. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

34. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, cu $a+b+c \neq 0$, și $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, determinați:
$(a+b)(b+c)(c+a)$.

35. Determinați $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, cu $a<b<c<d$ astfel încât $a!\cdot b!\cdot c!\cdot d!=10!$.

36. Fie $a \in \mathbb{R}$. Determinați $I \cap J$, dacă $I=(1, a^2]$, $J=(0, 4]$.

37. Determinați mulțimea $\left\{a \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{2a+1}{a^2+2a+3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

38. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a+b=4$. Demonstrați că $a^4+b^4 \geq 32$.

39. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \geq 0{,}99$.

40. Demonstrați că există o infinitate de pătrate perfecte (de numere naturale) având suma de forma $2^m+2^n+2^{2p}$, cu $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

41. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că $A(n)=k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, unde $A(n)=1!+3!+5!+(2n-1)!$.

42. Determinați $(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, dacă $x^2+y^2=x+y+xy$.

43. Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2-[x]=12$; b) $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=\{x\}$; c) $\left[\frac{nx+1}{n+1}\right]=\{x\}$, dacă $n \in \mathbb{Z}-\{-1\}$.

1.2. Şiruri. Progresii

- Şirul (a_n) este mărginit dacă există $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \leq a_n \leq b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- Şirul (a_n) este mărginit dacă există $M > 0$, astfel încât $|a_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- Şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numeşte:

  – strict crescător dacă $a_n < a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

  – strict descrescător dacă $a_n > a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

  – crescător dacă $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

  – descrescător dacă $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

  – monoton (strict) dacă este crescător (strict) sau descrescător (strict).
- Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *progresie aritmetică* dacă $a_1 \in \mathbb{R}$ şi $a_{n+1} = a_n + r$, $\forall n \geq 1$,

$r \in \mathbb{R}$, unde r se numeşte raţia progresiei aritmetice.

Proprietăţi:

a) Formula termenului general este $a_n = a_1 + (n-1)r$, $\forall\ n \geq 1$;

b) $(a_n)_{n\geq 1}$ progresie aritmetică $\Leftrightarrow\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall\ n \geq 2$;

c) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow\ a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1}$, $\forall\ k = \overline{1, n}$;

d) $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, $\forall\ n \geq 1$.

- Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *progresie geometrică* dacă $b_1 \in \mathbb{R}^*$ şi $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $\forall\ n \geq 1$;

$q \neq 0$ se numeşte raţia progresiei geometrice.

Proprietăţi:

a) Formula termenului general este $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall\ n \geq 1$;

b) $(b_n)_{n\geq 1}$ e progresie geometrică $\Leftrightarrow\ b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall\ n \geq 1$;

c) $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow\ b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k+1}$, $\forall\ k = \overline{1, n}$;

d) $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \begin{cases} b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți următorii trei termeni ai șirurilor:

a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$; b) $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \sqrt{20}, \ldots$.

2. Scrieți primii patru termeni ai șirurilor definite prin:

a) $a_n = 2n + 1$; b) $a_n = n^2 - n + 1$;

c) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1}$; d) $a_n = \frac{2n-1}{3n+1}$.

3. Demonstrați că următoarele șiruri sunt mărginite ($n \geq 1$):

a) $a_n = \frac{2}{n+1}$; b) $a_n = \frac{n+2}{n+4}$; c) $a_n = \frac{n+5}{n+2}$;

d) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$; e) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$; f) $a_n = \sqrt{\frac{4n^2-1}{n^2+1}}$.

4. Studiați monotonia șirurilor cu termenul general:

a) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$; b) $a_n = n^2 + 2n$; c) $a_n = n^2 - 5n + 4$;

d) $a_n = \frac{3n-1}{3n+2}$; e) $a_n = 2 + (-1)^n$; f) $a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2+n}$.

5. Studiați monotonia șirurilor cu termenul general:

a) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$; b) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$;

c) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$; d) $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n}$.

6. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$. Determinați a_1 și r în cazurile:

a) $\begin{cases} a_1 + a_7 = 36 \\ a_4 + a_5 = 41 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a_9 + a_{11} = -184 \\ a_5 + a_7 + a_9 = -189 \end{cases}$; c) $\begin{cases} a_1 + a_5 = 0 \\ a_2^5 + a_3^2 = 16 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} a_2 + a_4 = a_6 - 7 \\ a_8 - a_7 = 2a_4 \end{cases}$; e) $\begin{cases} S_{10} = 8S_5 \\ S_3 = -3 \end{cases}$; f) $\begin{cases} a_{20} = 39 \\ a_{40} = 79 \end{cases}$.

7. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$. Determinați a_1 și S_{10}, dacă $r = -2$, $a_n = -4$, $S_n = 50$.

8. Determinați suma primilor n termeni ai șirului $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots$.

9. Într-o progresie aritmetică cu număr impar de termeni, suma termenilor de rang par este 55, suma termenilor de rang impar este 66, iar produsul termenilor extremi este 21. Determinați ultimul termen al progresiei.

10. Suma primilor n termeni ai unui şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este S_n. precizaţi dacă avem o progresie aritmetică în cazurile:

a) $a_n = 5n - 1$; b) $S_n = 2n^2 + 3n$; c) $S_n = n^2 - n + 7$.

11. Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică dacă şi numai dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_n = \alpha n + \beta$.

12. Determinaţi S_{13} pentru progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} = 40$.

13. Într-o progresie aritmetică se ştie că $S_{10} = 100$, $S_{30} = 900$. Determinaţi S_{50}.

14. Determinaţi suma tuturor numerelor naturale de trei cifre care împărţite la 68 dau restul 5.

15. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$. Determinaţi b_{10}, b_{25} şi S_n dacă:

a) $b_1 = 3$, $b_4 = 24$; b) $b_5 = 5$, $b_6 = 80$; c) $b_5 = \frac{1}{2}$, $b_8 = -\frac{1}{2}$.

16. Pentru progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, determinaţi b_1 şi q dacă:

a) $b_1 + b_2 = 5$, $b_2 + b_4 = 20$; b) $b_2 - b_1 = 6$, $b_4 - b_3 = 54$;

c) $b_1 + b_2 = 8$, $b_1 + b_2 + b_3 = 26$; d) $b_2 + b_4 = \frac{5}{16}$, $b_1 + b_2 + b_3 = \frac{7}{8}$;

e) $b_1 - b_2 + b_3 = a$, $b_2 - b_3 + b_4 = 2a$, $a \in \mathbb{R}^*$;

f) $b_1 + b_2 + b_3 = a$, $b_2 + b_3 + b_4 = 4a$, $a \in \mathbb{R}^*$.

17. Stabiliţi dacă şirul cu termenul general următor este progresie geometrică:

a) $b_n = 2^{n+2}$; b) $b_n = 3^{-n+3}$; c) $b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$;

d) $b_n = 2^n - 1$; e) $b_n = 2^n + 3^n$; f) $b_n = n^2 + n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

18. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ dacă avem $\div\div\ a + x, b + x, c + x$.

19. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ dacă avem $\div\ 1, x, y$ şi $\div\div\ 1, x, y + 9$.

20. Fie $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ şi $\div\div\ (b_n)_{n\geq 1}$. Demonstraţi că $S_n \cdot (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

21. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ dacă avem $\div\ a, b, 9$ şi $\div\div\ a, b, 12$.

22. Determinaţi $a, b, c \in \mathbb{R}$ dacă avem $abc = 512$, $\div\div\ a, b, c$ şi $\div\ a - 1, b - 1, c - 5$.

23. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$. Determinaţi S_9, dacă $S_3 = 4$, $S_6 = 6$.

24. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $P_n = b_1 b_2 \ldots b_n$. Ştiind că $P_4 = P_5$, calculaţi P_9.

25. Fie $\div\div\ a, b, c, d$. demonstraţi că $a^2 + d^2 \geq b^2 + c^2$.

26. Determinați progresiile geometrice (a_n) și (b_n) dacă $a_1 = b_1$, $a_2 = b_1 + b_2$, $a_2 + a_3 =$ $= b_3 + b_4$, $a_n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

27. Calculați numărul $a = 4 + 44 + 444 + \ldots + \underbrace{44\ldots4}_{100}$.

28. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$, $a_{n+1} - 2a_n = 1$, $\forall\, n \geq 1$. Demonstrați că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit prin $b_n = 1 + a_n$ este progresie geometrică.

29. Determinați numărul termenilor supraunitari din progresia geometrică (b_n), dacă $b_n = 2026$ și rația este $q = \dfrac{1}{2}$.

30. Calculați suma primilor 30 de termeni ai unei progresii aritmetice, dacă $S_{10} = S_{20}$.

31. Demonstrați că dacă $\dfrac{1}{16}$, 2 și 16 sunt termeni ai unei progresii geometrice, atunci și 8 este termen al progresiei geometrice.

32. Demonstrați că dacă 43, 31 și 15 sunt termeni ai unei progresii aritmetice, atunci și 3 este termen al progresiei aritmetice.

33. Determinați al cincilea termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă $4b_2 + b_1 =$ $= 16b_3 - b_1 = 3$.

34. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n^4 + n^2}$. Determinați a_{100}.

35. Fie șirul $(a_n)_{n>1} \subset \mathbb{N}$. Demonstrați că șirul are termenul general $b_n = a_{a_n}$ este progresie geometrică.

36. Fie progresia aritmetică $\div\, (a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 1$ și rația $r = 17$. Determinați cel mai mic termen a_n, $n \geq 2$, care este pătrat perfect.

37. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1 = 2048$ și rația $q = \dfrac{1}{2}$. Determinați termenii progresiei care sunt pătrate perfecte.

38. Determinați termenul general al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin:

a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n - 2$, $\forall\, n \geq 1$;

b) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n^2 + n}$.

39. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$. Demonstrați că $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = \left(\sqrt{b_1 b_n}\right)^n$.

40. Demonstrați că numerele $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{n}$ nu pot fi termeni ai unei progresii:

a) aritmetice;

b) geometrice.